## 基础课58 事件的相互独立性、条件概率与全概率公式

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 考点考向 | 课标要求 | 真题印证 | 考频热度 | 核心素养 |
| 条件概率 | 掌握 | 2023年全国甲卷（理）  2023年天津卷  2022年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 相互独立事件 | 理解 | 2022年新高考Ⅱ卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 全概率公式 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，本基础课的命题热点是全概率公式，常与数列交汇，具有知识点多、覆盖面广、综合性强的特点.预计2025年高考的命题情况变化不大，全概率公式属于比较新的考点，应加强对相关模型的理解以及训练 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、相互独立事件

|  |  |
| --- | --- |
| 概念 | 对任意两个事件和，若①成立，则称事件与事件相互独立，简称为独立 |
| 性质 | 若事件与相互独立，则与,与，与也都相互独立 |

##### 二、条件概率

1.概念：一般地，设，为两个随机事件，且，我们称②为在事件发生的条件下，事件发生的条件概率，简称条件概率. 显然,0≤≤1.

2.两个公式

（1）利用古典概型：③.

（2）概率的乘法公式：④.

##### 三、全概率公式

设*B*1,*B*2,…,*Bn*为样本空间*Ω*的一个划分,若*P*(*Bi*)*>*0(*i=*1,2,…,*n*),则对任意一个事件*A*有*P*(*A*)*=*⑤*P*(*Bi*)*P*(*A|Bi*),称上式为全概率公式*.*

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 若事件，相互独立，则.( √ )

（2） 抛掷两枚质地均匀的硬币，记“第一枚为正面”为事件，记“第二枚为正面”为事件，则，相互独立.( √ )

（3） 全概率公式用于求复杂事件的概率，是求最后结果的概率.( √ )

（4） .( × )

2. （多选题）（易错题）甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球，先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别用事件,和表示“从甲罐中取出的球是红球，白球和黑球”；再从乙罐中随机取出一球，用事件表示“从乙罐中取出的球是红球”，则下列结论正确的是( BD ).

A. B.

C. 事件与事件相互独立 D. ,,是两两互斥的事件

**【易错点】**没有理解条件概率模型，同时对事件的相互独立和互斥分不清楚，从而出错.

[解析]依题意得，，，，故正确； 因为，，所以，故不正确； 因为，，，所以事件与事件不相互独立，故不正确； 根据互斥事件的定义可知,,是两两互斥的事件，故正确.故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修②P250·T1改编）掷两枚质地均匀的骰子，设事件“第一枚出现奇数点”，事件“第二枚出现偶数点”，则与的关系为( C ).

A. 互斥 B. 互为对立 C. 相互独立 D. 相等

[解析]掷两枚质地均匀的骰子，设“第一枚出现奇数点”，“第二枚出现偶数点”，事件与能同时发生，故事件与既不是互斥事件，也不是对立事件，故，错误；，，，，因为，所以与独立，故正确； 事件与不相等，故错误.故选.

4. （人教A版选修③P52·练习T1改编）现有12道单选题，某同学对其中9道题有思路，3道题完全没有思路.有思路的题做对的概率为，没有思路的题只好任意猜一个答案，猜对答案的概率为0.25.若该同学从这12道题中随机选择1题，则他做对该题的概率为.

[解析]记事件为“该同学选择的是有思路的题”，记事件为“做对该题”，则，，，，由全概率公式可得.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·全国甲卷]某地的中学有的同学爱好滑冰，的同学爱好滑雪，的同学爱好滑冰或爱好滑雪.在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为( A ).

A. 0.8 B. 0.6 C. 0.5 D. 0.4

[解析]记“该同学爱好滑雪”为事件，记“该同学爱好滑冰”为事件，则,，同时爱好两项的概率，所以.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 相互独立事件［多维探究］

##### 相互独立事件的判断角度1

典例1 袋子里装有形状大小完全相同的4个小球，球上分别标有数字1，2，3，4，从中有放回地随机取两次，每次取1个球，事件表示“第一次取出的球上的数字是1”，事件表示“第二次取出的球上的数字是2”，事件表示“两次取出的球上的数字之和的是5”，事件表示“两次取出的球上的数字之和是6”，则( C ).

A. 与相互独立 B. 与相互独立 C. 与相互独立 D. 与相互独立

[解析]由题意可得,,

有放回地随机取两次，每次取1个球，两次取出的球上数字之和是5的情况有,,,，共4种，

所以,

两次取出的球上数字之和是6的情况有,,，共3种，故.

对于,,,则，故与不是相互独立事件，故错误；

对于,,,

则,故与不是相互独立事件，故错误；

对于,,,

则，故与是相互独立事件，故正确；

对于,,,

则，故与不是相互独立事件，故错误.故选.



判断事件是否相互独立的方法

1.定义法：事件,相互独立.

2.由事件本身的性质直接判定两个事件发生是否相互影响.

3.条件概率：当时，可用判断.

##### 相互独立事件的概率角度2

典例2 [2023·天津卷]（双空题）甲、乙、丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球，其总数之比为，这三个盒子中黑球占总数的比例分别为,,.现从三个盒子中各取一个球，取到的三个球都是黑球的概率为0.05；将三个盒子混合后任取一个球是白球的概率为.

[解析]设甲、乙、丙三个盒子中的球的个数分别为,,，所以总数为，

所以甲盒中黑球个数为，白球个数为,

乙盒中黑球个数为，白球个数为,

丙盒中黑球个数为，白球个数为.

记“从三个盒子中各取一个球，取到的球都是黑球”为事件，所以

.

记“将三个盒子混合后取出一个球，是白球”为事件，

黑球总共有个，白球共有个，所以.



利用相互独立事件求复杂事件概率的解题策略

1.将待求的复杂事件转化为几个彼此互斥的简单事件的和；

2.将彼此互斥的简单事件中的简单事件转化为几个已知（易求）概率的相互独立事件的积事件；

3.代入概率的积、和公式求解.

##### 多维训练

1. 甲、乙两名射手同时向一目标射击，设事件“甲击中目标”，事件“乙击中目标”，则事件与事件( A ).

A. 相互独立但不互斥 B. 互斥但不相互独立

C. 相互独立且互斥 D. 既不相互独立也不互斥

[解析]对同一目标射击，甲、乙两名射手是否击中目标是互不影响的，所以事件与事件相互独立；对同一目标射击，甲、乙两名射手可能同时击中目标，也就是说事件与事件可能同时发生，所以事件与事件不是互斥事件.

故选.

2. 三个人独立地破译一份密码，他们能单独译出密码的概率分别为，，，假设他们能否破译出密码是相互独立的，则此密码被破译的概率为( B ).

A. B. C. D.

[解析]三个人独立地破译一份密码，他们能单独译出密码的概率分别为，，，他们能否破译出密码是相互独立的，

则三个人均未破译密码的概率为，则此密码被破译的概率为.故选.

#### 考点二 条件概率［师生共研］

典例3（1） 对标有不同编号的6件正品和4件次品进行检测，不放回地依次摸出2件.在第一次摸出次品的条件下，第二次摸到正品的概率为( D ).

A. B. C. D.

[解析]记“第一次摸出的是次品”，“第二次摸到的是正品”，由题意知，，，则.故选.

（2） [2022·天津卷]（双空题）52张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到A的概率为；已知第一次抽到的是A，则第二次抽到A的概率为.

[解析]由题意，设“第一次抽到”的事件为,“第二次抽到”的事件为,

则,,.



求条件概率的常用方法

1.利用定义，分别求和，得.

2.借助古典概型概率公式，先求事件包含的基本事件数，再在事件发生的条件下求事件包含的基本事件数，即，得.

##### 针对训练

1. 某地区空气质量监测资料表明，一天的空气质量为优良的概率是，连续两天为优良的概率是0.6.已知某天的空气质量为优良，则随后一天的空气质量为优良的概率是( A ).

A. 0.8 B. 0.75 C. 0.6 D. 0.45

[解析]记事件为“第一天的空气质量为优良”，事件为“第二天的空气质量也为优良”，由题意可知，，所以，故选.

2. 现有甲、乙、丙、丁四位同学到夫子庙、总统府、中山陵、南京博物馆这4处景点旅游，每人只去一处景点，设事件为“4个人去的景点各不相同”，事件为“只有甲去了中山陵”，则.

[解析]甲、乙、丙、丁四位同学到夫子庙、总统府、中山陵、南京博物馆4处景点旅游，共有种不同的方案，

事件“4个人去的景点各不相同”,方案有（种），

事件“只有甲去了中山陵”,方案有（种），

事件同时发生的方案有（种），

则，,

所以.

#### 考点三 全概率公式［师生共研］

典例4 若甲乘汽车、动车前往某目的地的概率分别为，，汽车和动车正点到达目的地的概率分别为，，则甲正点到达目的地的概率为( C ).

A. 0.78 B. 0.8 C. 0.82 D. 0.84

[解析]设事件表示“甲正点到达目的地”，事件表示“甲乘动车到达目的地”，事件表示“甲乘汽车到达目的地”，由题意知,,,.

由全概率公式得.故选.



利用全概率公式解题的思路

1.按照确定的标准，将一个复杂事件分解为若干个互斥事件；

2.求和所求事件在各个互斥事件发生条件下的概率；

3.代入全概率公式计算.

【注意】要区分和.

##### 针对训练

1. 某种电路开关闭合后会出现红灯或绿灯闪动，已知开关第一次闭合后，出现红灯和绿灯的概率都是.从开关第一次闭合起，若前一次出现红灯，则下一次出现红灯的概率是，出现绿灯的概率是；若前一次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率是，出现绿灯的概率是.求第二次闭合后出现红灯的概率为.

[解析]记“第一次闭合后出现红灯”为事件，则“第一次闭合后出现绿灯”为事件，“第二次闭合后出现红灯”为事件，“第二次闭合后出现绿灯”为事件，则，，，

所以.

2. （改编）某蜂农为推销自己纯天然的绿色产品，制作广告牌“蜜蜂酿蜂蜜”，因大风导致其中有两字脱落，路人捡起随意放回，则放回后排列仍是“蜜蜂酿蜂蜜”的概率为.

[解析]用表示事件“放回仍为蜜蜂酿蜂蜜”，用表示事件“脱落的两个汉字相同”，用表示事件“脱落的两个汉字不相同”，则,,,,,代入得.

### 拓展教材 深度学习

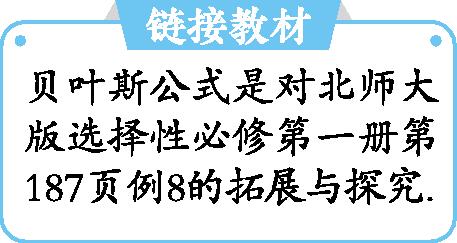
贝叶斯公式

人们常见到这样的广告：购买某产品，它将会给你带来某效用.听到这样的承诺：投资某产品或投资某地，你的回报率将是多少.但如果人们问一个反问题：我要求回报率达到多少那么应投资何产品或在何地投资呢？或者我要求达到某效用那么应购买何产品呢？显然这样的反问题是很有意义的.下面介绍的贝叶斯公式就是这类问题在概率中的相应模型.

**贝叶斯公式：**设,, ,是一组两两互斥的事件， ，且，,2, ，，对任意的随机事件 ，当时，有

,,2, ,.

一般称为先验概率，就是做试验前就已知的概率，简单说就是经验，为后验概率，由此得到的决策叫作贝叶斯决策.现行教材中，贝叶斯公式是选学内容，不做高考要求，但就实质来说，贝叶斯公式就是条件概率的应用，因此，学习贝叶斯公式可以加深我们对条件概率的理解.



典例 设，， ，是一组两两互斥的事件， ，且，,2, ,，则对任意的事件 ，，求证：，,2, ,.

[解析]由乘法公式可知，又由全概率公式可知，,,2, ,.

所以,,2, ,.

深度训练1 （多选题）在某一季节，疾病的发病率为，其中的病人表现出症状，疾病的发病率为，其中的病人表现出症状，疾病的发病率为，其中的病人表现出症状，则( ABC ).

A. 任意一位病人有症状的概率为0.02

B. 病人有症状时患疾病的概率为0.4

C. 病人有症状时患疾病的概率为0.45

D. 病人有症状时患疾病的概率为0.25

[解析]，，，，，，由全概率公式得.

由贝叶斯公式得，

，.故选.

深度训练2 某公司员工的上班出行方式有三种，某天早上他选择自驾、坐公交车、骑共享单车的概率分别为，，，而他自驾、坐公交车、骑共享单车迟到的概率分别为，，，结果某一天他迟到了，则在此条件下，他自驾去上班的概率是.

[解析]由题意设事件表示“自驾”，事件表示“坐公交车”，事件表示“骑共享单车”，事件表示“迟到”，则，，，，，

该员工迟到了，由贝叶斯公式得他自驾去上班的概率是.